ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(Ενδεικτικές απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 76 σχολικού βιβλίου.

Α2. Σελίδα 155 σχολικό βιβλίο.

Α3. Σελίδα 216 σχολικό βιβλίο .

Α4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα τα x όπου $x \in A_g \cap A_h$ **και** $h(x) \neq 0$

Δηλαδή $x \in [1,+\infty)$ **και** $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα $A_f = (1,+\infty)$ και $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{x+1}{x-1}$

Άρα $\boxed{f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1}$ **(1)**

Η συνάρτηση $r(x)$ ορίζεται όταν $x \in A_g \cap A_h$ δηλαδή όταν $x \in [1,+\infty)$

Άρα $A_r = [1,+\infty)$ και $r(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_f = (1,+\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_f = (1,+\infty)$ επομένως και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f .

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_f = (1,+\infty)$ άρα

$f(A_f) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1,+\infty)$ διότι

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1)\dfrac{1}{x-1} = 2\cdot(+\infty) = +\infty$

Άρα $A_{f^{-1}} = (1,+\infty)$,για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = 1 + y \Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

Άρα $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, x > 1}$ **(2)**

Από **(1)** **,(2)** ισχύει $f = f^{-1}$

Εναλλακτικά : Έστω $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ άρα

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1) \Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται .

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = xy - y \Leftrightarrow xy - x = y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1}$$

Πρέπει $x > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$

Β3. Η $r(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες .

Θα αναζητήσουμε ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$$

Άρ η ευθεία $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

B4. Η εξίσωση $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)^2=1+4r(x)$ ορίζεται για $x\in(1,+\infty)$

Ισοδύναμα έχουμε:

$$x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^3=x+4x^2-4\Leftrightarrow x^3-x-4x^2+4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0\Leftrightarrow(x-4)\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow(x-4)(x-1)(x+1)=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις τις $x=4, x=1, x=-1$ από τις οποίες δεκτές είναι η $x=4$ αφού πρέπει $x>1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα θα είναι συνεχής και στο $x_0=2$ οπότε

$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)\Leftrightarrow e^{\lambda}=1+\lambda$ η οποία ισχύει μόνο για $\lambda=0$

Ισχύει $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει για $x=1$

Θέτουμε $\ln x=u$ όπου $u\in\mathbb{R}$ άρα $u\le e^u-1\Leftrightarrow e^u\ge u+1$ και η ισότητα ισχύει όταν $e^u=1\Leftrightarrow u=0$

Γ2. Για $\lambda=0$ $f(x)=\begin{cases}-2x+5, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3, & x\ge2\end{cases}$

Αν $x\in(0,2)$: $f'(x)=-2<0$ και επειδή η f συνεχής στο $[0,2]$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό .

Αν $x\in(2,+\infty)$: $f'(x)=-2x+4=-2(x-2)<0$ και επειδή η f συνεχής στο $[2,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό .

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A_f=[0,+\infty)$ και στη θέση $x=0$ έχει ελάχιστο το $f(0)=5$

Γ3. (i) Η είναι συνεχής στο $[0,3]$.

Στο $x_0=2$ η f ΄΄αλλάζει΄΄ τύπο και είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0,3]$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+5-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(x-2)^2}{x-2}=0$

  Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ άρα δεν ικανοποιεί τη $2^η$ προϋπόθεση του Θ.Μ.Τ που ζητάει να είναι παραγωγίσιμη στο $(0,3)$

(ii) Ισχύει $f(0)=5$ και $f(3)=0$

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Ε και Δ έχει κλίση $\lambda_{ΓΔ}=\dfrac{f(3)-f(5)}{3-5}=-\dfrac{5}{3}$

Θα λύσουμε την εξίσωση $f'(x)=-\dfrac{5}{3}$ με $x\in(0,2)\cup(2,3)$

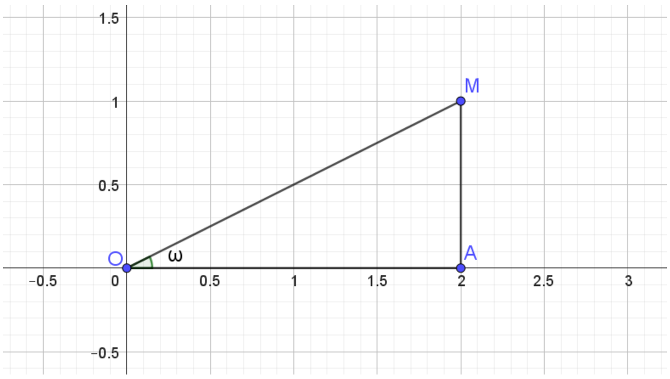
Αν $x\in(0,2)$: $f'(x)=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -2=-\dfrac{5}{3}$ αδύνατη

Αν $x\in(2,3)$: $f'(x)=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -2x+4=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{6}$ με $\dfrac{17}{6}\in(2,3)$

Άρα στο σημείο $M\left(\dfrac{17}{6},f\left(\dfrac{17}{6}\right)\right)$ η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στη ευθεία ΓΔ

Γ4. Το σημείο Μ ξεκινάει από το σημείο $A(2,0)$ και συναντάει την γραφική παράσταση της f στο σημείο $(2,f(2))$ δηλαδή στο $(2,1)$

Άρα έχουμε το τρίγωνο ΑΟΜ όπου $A(2,0),M(2,1)$ και $O(0,0)$



Ισχύει $εφω=\dfrac{AM}{OA}\Leftrightarrow εφω=\dfrac{1}{2}AM$

Άρα $εφω(t)=\dfrac{1}{2}y(t)$, παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε

$$\frac{1}{συν^2ω(t)}\cdot ω'(t)=\frac{1}{2}y'(t)\Leftrightarrow ω'(t)=\frac{1}{2}y'(t)\cdot συν^2ω(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε $\omega'(t_0)=\frac{1}{2}y'(t_0)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)$ **(A)**

Ισχύει $y'(t_0)=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0)=\frac{OA}{AM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$OM^2=OA^2+AM^2\Leftrightarrow OM^2=2^2+1^2\Leftrightarrow OM=\sqrt{5}$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (A) έχουμε $\omega'(t_0)=\frac{1}{5}$ rad/sec.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\alpha, x\in(0,+\infty)$

Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow x=e$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x}>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow x<e$

$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x}<0\Leftrightarrow 1-\ln x<0\Leftrightarrow x>e$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[e,+\infty)$. Στην θέση $x=e$ έχει μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}+\alpha$

Από το σύνολο τιμών της f που είναι δεδομένο από τη εκφώνηση πρέπει

$$\frac{1}{e}+1=\frac{1}{e}+\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$$

Δ2. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$\Delta_1=(0,e]$ και $\Delta_2=[e,+\infty)$

$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),f(e)\right]=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right)$ αφού $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}+1=\lim_{x\to 0}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)+1=-\infty$

$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(e)\right]=\left(1,1+\frac{1}{e}\right]$ διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+1=1$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$ αφού εκεί περιέχεται το μηδέν . Η f συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}+1=2\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1=2(\ln1-\ln2)+\ln e=-2\ln2+\ln e=\ln e-\ln4=\ln\left(\frac{e}{4}\right)<0$

- $f(1)=1>0$

Δηλαδή $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$, άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, το x_0 είναι μοναδικό αφού μόνο μία ρίζα έχει η f .

Δ3. Είναι γνωστό το σύνολο τιμών της f σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$\Delta_1=(0,e]$ και $\Delta_2=[e,+\infty)$ δηλαδή $f(\Delta_1)=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right)$ $f(\Delta_2)=\left(1,1+\frac{1}{e}\right]$

Ο αριθμός $2\in(0,e]$ και $f(2)=\frac{\ln2}{2}+1$

Ο αριθμός $4\in[e,+\infty)$ και $f(4)=\frac{\ln2}{2}+1$

Δηλαδή οι τιμές $f(2)$ και $f(4)$ είναι ίσες

Το $\frac{\ln2}{2}+1\in f(\Delta_1)$ και το $\frac{\ln2}{2}+1\in f(\Delta_2)$ και λόγω μονοτονίας σε κάθε διάστημα υπάρχει μόνο ένα x σε κάθε διάστημα .Άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{\ln2}{2}+1$ έχει δύο ακριβώς λύσεις τις $x=2$ και $x=4$

(ii)

$2^x\le x^2\Leftrightarrow\ln2^x\le\ln x^2\Leftrightarrow x\ln2\le2\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}\ge\frac{\ln2}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}+1\ge\frac{\ln2}{2}+1\Leftrightarrow f(x)\ge\frac{\ln2}{2}+1$

Αν $x\in(0,e]$ $f(x)\ge\frac{\ln2}{2}+1\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x\ge2$ άρα $2\le x\le e$

Αν $x \in [e,+\infty)$ $f(x) \geq \frac{\ln 2}{2}+1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(4) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x \leq 4$ άρα $e \leq x \leq 4$

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in [2,4]$

Εναλλακτικά : Η εξίσωση $f(x)=\frac{\ln 2}{2}+1$ έχει 2 ρίζες τους αριθμούς 2 και 4 άρα η συνάρτηση $h(x)=f(x)-\frac{\ln 2}{2}-1$ θα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $[2,4]$ με εξαίρεση το 2 και το 4 όπου κάνει μηδέν .

$h(3)=\frac{\ln 3}{3}+1-\frac{\ln 2}{2}-1=\frac{2\ln 3-3\ln 2}{6}=\frac{\ln 9-\ln 8}{6}>0$ και λόγω διατήρησης προσήμου ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [2,4]$ οπότε $f(x) \geq \frac{\ln 2}{2}-1$ όταν $x \in [2,4]$

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\frac{1-x}{e^x}\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\frac{1-x}{e^{2x}}\right|e^x dx$

Θέτουμε $e^x=u \Rightarrow e^x dx=du$

Για $x=-\ln 2$ έχουμε $u=\frac{1}{2}$ ενώ για $x=0$ έχουμε $u=1$

Άρα $E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\cdot\frac{1-\ln u}{u^2}\right|du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\cdot f'(u)\right|du$

$f'(x)>0$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$

Η f μηδενίζεται στο $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ και στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα αν $\frac{1}{2}<x<x_0$ τότε λόγω του ότι η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x)<0$

Άρα αν $x_0<x<1$ τότε λόγω του ότι η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x)>0$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}-f(x)\cdot f'(x)dx+\int_{x_0}^{1}f(x)\cdot f'(x)dx=\left[\frac{-f^2(x)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{x_0}^{1}=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^2(1)}{2}$$

Άρα $E=\dfrac{\ln^2\left(\dfrac{e}{4}\right)+1}{2}$, αφού ισχύει $f\left(x_0\right)=0$