

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 6

- A2.** Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

- β)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

- γ)** Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ , ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

- δ)** Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

- ε)** Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$, $x > 0$.

B2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1 + x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \alpha, & x \geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) και τη γωνία που σχηματίζει η (ϵ) με τον άξονα $x'x$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε) , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2) .

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ